

Primeira Lista de Exercícios de Estatística

Professor Marcelo Fernandes

Monitor: Márcio Salvato

1. Suponha que o universo seja formado pelos naturais de 1 a 10. Sejam $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{5, 6, 7\}$. Enumere os elementos dos seguintes conjuntos:

- (a) $\overline{A} \cap B$
- (b) $\overline{A} \cup B$
- (c) $\overline{\overline{A \cap B}}$
- (d) $A \cap (\overline{B \cap C})$
- (e) $\overline{A \cap (B \cup C)}$

2. Suponha que o universo seja $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, e considere os conjuntos $A = \{x \mid 1/2 < X \leq 1\}$ e $B = \{x \mid 1/4 \leq x \leq 3/2\}$. Descreva os seguintes conjuntos:

- (a) $\overline{A \cup B}$
- (b) $A \cup \overline{B}$
- (c) $\overline{A \cap B}$
- (d) $\overline{A \cap B}$

3. Quais das seguintes relações são verdadeiras?

- (a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
- (b) $(A \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cup B$
- (c) $\overline{A} \cap B = A \cup B$
- (d) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- (e) $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C) = \emptyset$

4. Suponha que o conjunto fundamental seja formado por todos os pontos (x, y) de coordenadas ambas inteiras, e que estejam dentro ou sobre a fronteira do quadrado limitado pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$ e $y = 6$. Enumere os elementos dos seguintes conjuntos:

- (a) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6\}$
- (b) $B = \{(x, y) \mid y \leq x^2\}$
- (c) $C = \{(x, y) \mid x \leq y^2\}$
- (d) $B \cap C$
- (e) $(B \cup A) \cap \overline{C}$

5. Considere quatro objetos, a , b , c e d . Suponha que a ordem em que tais objetos sejam listados represente o resultado de um experimento. Defina os eventos A e B da seguinte forma:
 $A = \{a \text{ está na primeira posição}\}$ e
 $B = \{b \text{ está na segunda posição}\}$.
 Enumere todos os elementos do espaço amostral, assim como todos os elementos dos eventos $A \cap B$ e $A \cup B$.
6. Um lote contém peças pesando 5, 10, 15, ..., 50 gramas. Admitamos que ao menos duas peças de cada peso sejam encontradas no lote. Duas peças são retiradas do lote. Sejam x o peso da primeira peça escolhida e y o peso da segunda. Portanto, o par de números (x, y) representa um resultado do experimento. Empregando o plano xy , marque o espaço amostral e os seguintes eventos:
- $A = \{(x, y) \mid x = y\}$
 - $B = \{(x, y) \mid x < y\}$
 - A segunda peça é duas vezes mais pesada que a primeira.
 - A primeira peça pesa menos 10 gramas que a segunda peça.
 - O peso médio de duas peças é menor do que 30 gramas.
7. Durante um período de 24 horas de um pregão eletrônico, em algum momento $0 \leq t \leq 24$, Peter Pan adquire uma carteira formada por ações de empresas do setor de entreterimento. Mais tarde, no instante s ($t < s \leq 24$), Peter Pan vende a carteira. Suponha que t e s sejam medidas em horas no eixo do tempo, com o início do período na origem da escala. O resultado do experimento é constituído pelo par de números (t, s) . Descreva o espaço amostral e marque no plano xy os seguintes eventos:
- Peter Pan compra a carteira após um período menor ou igual a uma hora.
 - Peter Pan ainda possui a carteira em um instante $\tau \leq 24$.
 - Peter Pan compra a carteira antes de t_1 e vende depois de t_2 , onde $0 \leq t_1 < t_2 < 24$.
 - Peter Pan possui a carteira por um período duas vezes maior do que o período de não posse dentro dessas 24 horas de pregão.
8. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = a$, $P(B) = b$, e $P(A \cap B) = c$. Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de a , b , e c :
- $P(\overline{A \cup B})$
 - $P(\overline{A} \cup B)$

(c) $P(\overline{A} \cap B)$

(d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

9. Suponha que A , B e C sejam eventos equiprováveis ocorrendo com probabilidade $1/4$ tais que $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ e $P(A \cap C) = 1/8$. Calcule a probabilidade de que ao menos um dos eventos A ou B ocorra.
10. O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 adultos paulistas; 4 crianças paulistas; 6 adultos mineiras, e 3 crianças mineiras. Uma pessoa é escolhida ao acaso.
- (a) Qual é a probabilidade da pessoa selecionada ser criança ou mineira?
- (b) Qual é a probabilidade da pessoa selecionada não ser nem adulta nem paulista?
11. Em uma sala, 10 pessoas estão usando crachás numerados de 1 a 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. Os números de seus crachás são anotados.
- (a) Qual é a probabilidade de que o menor número seja 5?
- (b) Qual é a probabilidade de que o menor número seja 5?
12. Uma remessa de 1.500 peças contém 400 peças defeituosas e 1.100 perfeitas. Duzentas peças são escolhidas ao acaso (sem reposição) e classificadas.
- (a) Qual é a probabilidade de serem encontradas exatamente 90 peças defeituosas?
- (b) Qual é a probabilidade de serem encontradas exatamente 2 peças defeituosas?
13. Dez fichas numeradas de 1 até 10 são misturadas em uma urna. Duas fichas, numeradas (x, y) , são extraídas da urna de forma sucessiva e sem reposição. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas fichas extraídas seja igual a 10?
14. Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso.
- (a) Qual é a probabilidade de não ser defeituoso?
- (b) Qual é a probabilidade de não possuir um defeito grave?
- (c) Qual é a probabilidade de ser perfeito ou ter um defeito grave?

15. Um produto é montado em três estágios. No primeiro estágio, existem 5 linhas de montagem; no segundo estágio, existem 4 linhas de montagem e no terceiro estágio, existem 6 linhas de montagem. De quantas maneiras diferentes poderá o produto se deslocar durante o processo de montagem?
16. Um inspetor visita 6 máquinas diferentes durante um dia. A fim de evitar que os operários saibam quando ele os irá inspecionar, o inspetor varia a ordem de suas visitas. De quantas maneiras isto pode ser feito?
17. Um mecanismo pode ser posto em uma dentre quatro posições. Existem 8 desses mecanismos incluídos em um sistema.
- (a) De quantas maneiras esse sistema pode ser disposto?
 - (b) Admita que esses mecanismos sejam instalados em determinada ordem linear preestabelecida. De quantas maneiras o sistema poderá ser disposto, se dois mecanismos adjacentes não estiverem em igual posição?
 - (c) Quantas maneiras de dispor serão possíveis, se somente as duas primeiras posições forem usadas, e em igual frequência?
 - (d) Quantas maneiras serão possíveis, se somente duas posições forem usadas, e dessas posições uma ocorrer três vezes mais frequentemente que a outra?
18. Quantas senhas de 4 letras poderão ser formadas com as seis primeiras letras do alfabeto se
- (a) nenhuma letra puder ser repetida?
 - (b) qualquer letra puder ser repetida indiscriminadamente?
19. Suponha que $\binom{99}{5} = a$ e $\binom{99}{4} = b$. Expresse $\binom{100}{95}$ em termos de a e b .
20. Um inteiro entre 1 e 50 é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade do número escolhido ser múltiplo de 6 ou de 8?
21. Exercícios do livro texto (3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, e 3.10).

Segunda Lista de Exercícios de Estatística

Professor Marcelo Fernandes

Monitor: Márcio Salvato

1. Duas peças defeituosas se misturam com duas peças perfeitas. As peças são testadas uma a uma até que ambas as defeituosas sejam encontradas.
 - (a) Qual é a probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no segundo teste?
 - (b) Qual é a probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste?
 - (c) Qual é a probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no quarto teste?
 - (d) Some os números obtidos nas questões acima. O resultado é surpreendente?
2. Uma caixa contém 4 peças defeituosas e 6 perfeitas. Duas peças são extraídas juntas. Uma delas é testada e se verifica ser perfeita. Qual a probabilidade da outra peça ser também perfeita?
3. Um saco contém três moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto as duas outras moedas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso do saco e jogada quatro vezes, em sequência. Se sair cara toda vez, qual será probabilidade de que essa seja a moeda de duas caras?
4. Sejam A e B dois eventos tais que $P(A) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,7$. Assumindo que $P(B) = p$,
 - (a) para que valor de p , A e B são mutuamente excludentes?
 - (b) para que valor de p , A e B são independentes?
5. Três componentes C_1 , C_2 , e C_3 de um mecanismo são postos em série. Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Sejam $R = \{C_2 \text{ está à direita de } C_1\}$ e $S = \{C_3 \text{ está à direita de } C_1\}$. Os eventos R e S são independentes? Por que?
6. Um dado é lançado e, independentemente, uma carta é extraída de um baralho francês completo (52 cartas). Calcule a probabilidade dos seguintes eventos:
 - (a) O dado mostre um número par e a carta seja de um naipe vermelho?
 - (b) O dado mostre um número par ou a carta seja de um naipe vermelho?

7. Um número binário é constituído apenas dos dígitos zero e um. Suponha que um número binário seja formado de n dígitos, que a probabilidade de um dígito incorreto aparecer seja p , e que erros em diferentes dígitos sejam independentes uns dos outros. Qual será a probabilidade de formar-se um número incorreto?
8. Qual é a probabilidade de que apareça pelo menos um 6 em n lançamentos de um dado de seis faces?
9. Dois indivíduos jogam três moedas equilibradas cada um. Qual é a probabilidade de que eles obtenham o mesmo número de caras?
10. Jogam-se dois dados. Desde que as faces mostrem números diferentes, qual é a probabilidade de que uma face seja 4?
11. Imagine que na fabricação de uma certa peça, defeitos de um tipo ocorrem com probabilidade 0,1 e defeitos de outro tipo com probabilidade 0,05. Qual é a probabilidade
 - (a) da peça não apresentar nenhum defeito?
 - (b) da peça ser defeituosa?
 - (c) da peça ter apenas um tipo de defeito, quando defeituosa?
12. Demonstre que se (A, B) forma um par de eventos independentes, também formarão (A, \overline{B}) , (\overline{A}, B) , e $(\overline{A}, \overline{B})$.
13. Uma linha de produção utiliza duas máquinas A e B . Testes realizados previamente indicam que a probabilidade de A falhar é $1/5$; de tanto A como B falharem é $3/20$; e de B falhar sozinho é também $3/20$. Calcule as seguintes probabilidades:
 - (a) $P(A \text{ falhar} \mid B \text{ falhou})$
 - (b) $P(A \text{ falhar sozinho})$
14. Três jornais A , B e C são publicados em uma cidade e uma recente pesquisa entre os leitores indica o seguinte: 20% lêem A ; 26% lêem B ; 14% lêem C ; 8% lêem A e B ; 5% lêem A e C ; 2% lêem A , B e C ; e 4% lêem B e C . Para um adulto escolhido ao acaso, calcule a probabilidade
 - (a) dele não ler qualquer jornal;
 - (b) dele ler apenas um jornal;
 - (c) dele ler apenas um jornal;
 - (d) dele ler ao menos A e B , sabendo que ele lê ao menos um jornal.

15. Um amador emprega a seguinte regra de previsão de tempo. Ele classifica o tempo diariamente como seco ou úmido, e assume que a probabilidade p de um dia cair na mesma categoria do dia anterior é constante. Com base em registros passados, ele admite que primeiro de janeiro tenha probabilidade β de ser um dia seco. Denotando por β_n a probabilidade de que o n -ésimo dia do ano seja seco, obtenha uma expressão para β_n em termos de β e de p . Calcule também $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ e interprete o seu resultado
16. Considere n urnas contendo cada uma α bolas brancas e β bolas pretas. Uma bola é retirada da primeira urna e posta na segunda; em seguida, uma bola é retirada da segunda urna e posta na terceira, e assim por diante. Finalmente, uma bola é retirada da última urna. Se a primeira bola transferida for branca, qual é a probabilidade da última bola escolhida ser branca? O que acontece quando $n \rightarrow \infty$?
Sugestão: Denote por p_n a probabilidade da n -ésima bola transferida ser branca e exprima p_n em termos de p_{n-1} .
17. Uma urna contém α bolas brancas e β bolas pretas, enquanto uma segunda urna contém β bolas brancas e α pretas. Uma bola é extraída (de uma das urnas) e é em seguida repostada naquela urna. Se a bola extraída for branca, escolha a próxima bola da primeira urna; se a bola extraída for preta, escolha a próxima bola da segunda urna. Continue operando dessa maneira indefinidamente. Dado que a primeira bola escolhida venha da primeira urna, calcule a probabilidade da n -ésima bola escolhida ser branca e o seu limite quando $n \rightarrow \infty$.

Terceira Lista de Exercícios de Estatística

Professor Marcelo Fernandes

Monitor: Márcio Salvato

1. Suponha que X seja uniformemente distribuída em $(-1, 1)$. Calcule a função densidade de probabilidade de $Y = 4 - X^2$ e faça o seu gráfico. Verifique que a função obtida satisfaz as propriedades de uma densidade.
2. Suponha que X seja uniformemente distribuída em $(1, 3)$. Derive as funções densidade de $Y = 3X + 4$ e $Z = \exp(X)$. Verifique em cada caso se a função obtida é uma densidade, esboce seus gráficos, e determine o valor esperado e a variância.
3. Suponha que a variável aleatória X assuma os valores 1, 2 e 3 com igual probabilidade. Derive a distribuição de probabilidade de $Y = 2X + 3$.
4. Suponha que X seja uniformemente distribuída em $(0, 1)$. Encontre a função densidade de probabilidade da variável aleatória $Y = X^2 + 1$.
5. Suponha que $\Pr(X \leq 0,29) = 0,75$, onde X é uma variável aleatória contínua com distribuição definida em $(0, 1)$. Determine o valor de k tal que $\Pr(Y \leq k) = 0,25$ quando $Y = 1 - X$.
6. Suponha que a variável aleatória discreta (X, Y) apresente uma distribuição de probabilidade conjunta como especificado na tabela abaixo. Calcule as distribuições marginais e as condicionadas.

		X		
		1	2	3
Y	1	1/12	1/6	0
	2	0	1/9	1/5
	3	1/18	1/4	2/15

7. Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha a seguinte função densidade de probabilidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x - y), & \text{para } 0 < x < 2 \text{ e } -x < y < x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Calcule a constante k .
- (b) Derive a densidade marginal de X .
- (c) Derive a densidade marginal de Y .

8. Suponha que duas cartas sejam tiradas ao acaso de um baralho de cartas. Sejam X e Y os números de valetes e damas obtidos.
- Estabeleça a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) .
 - Estabeleça a distribuição marginal de X .
 - Estabeleça a distribuição marginal de Y .
 - Estabeleça a distribuição condicional de X dado Y .
 - Estabeleça a distribuição condicional de Y dado X .

9. Para que valor de k , a expressão $f(x, y) = k \exp[-(x+y)]$ é uma função densidade de probabilidade conjunta para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$?

10. Suponha que a variável aleatória contínua (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre um quadrado com vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Derive as densidades marginais de X e de Y .

11. Suponha que a densidade conjunta de (X, Y) seja dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-y), & \text{para } y > x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Estabeleça a distribuição marginal de X .
- Estabeleça a distribuição marginal de Y .
- Calcule a $\Pr(X > 2 | Y < 4)$.

12. Calcule o valor esperado e a variância de D considerando que

$$\Pr(D = d) = \begin{cases} 1/10, & \text{para } d = 1 \text{ ou } d = 2 \\ 3/10, & \text{para } d = 3 \text{ ou } d = 4 \\ 1/5, & \text{para } d = 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

13. Suponha que a duração de vida (em 1.000 horas) de um dispositivo eletrônico seja uma variável aleatória contínua X com distribuição exponencial, isto é, $f(x) = \exp(-x)$ para todo $x > 0$. Suponha ainda que o custo de fabricação seja 2 reais por unidade, enquanto que o preço de venda seja 5 reais por unidade. Assumindo que o fabricante garanta o reembolso integral caso $X \leq 0,9$, calcule o lucro esperado por unidade do fabricante?

14. As 5 primeiras repetições de um experimento custam 100 reais cada, enquanto que as repetições subseqüentes custam apenas 50 reais. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro resultado positivo ocorra. Calcule o custo esperado da operação supondo que os resultados dos experimentos são independentes e que a probabilidade de um resultado positivo é 0,9.

15. Sabe-se que um lote contém 2 peças defeituosas e 8 peças em perfeitas condições. Se essas peças forem inspecionadas ao acaso, uma após a outra, qual é o número esperado de peças que devem ser escolhidas para inspeção, a fim de removerem-se todas as peças defeituosas?
16. Um lote de 10 peças deve ser ou totalmente rejeitado ou vendido, dependendo do resultado do seguinte procedimento. Duas peças são escolhidas ao acaso e testadas. Se uma ou mais forem defeituosas, o lote é rejeitado; caso contrário, é aceito. Suponha que cada peça custe 75 reais e seja vendida por 100 reais. Se o lote contiver apenas uma peça defeituosa, qual será o lucro esperado do fabricante?
17. Suponha que D , a demanda diária por um produto, seja uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $\Pr(D = d) = a2^d/d!$ para $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Considere que o produto seja vendido por 5 reais e que o fabricante produza diariamente uma quantidade K . Imagine ainda que qualquer produto que não seja vendido ao longo do dia deve ser abandonado, resultando em um prejuízo de 3 reais.
- (a) Calcule a constante a .
 - (b) Calcule a demanda esperada.
 - (c) Determine a distribuição de probabilidade do lucro diário em função de K .
 - (d) Quantos produtos devem ser fabricados para maximizar o lucro diário esperado?
18. Suponha que a densidade de X seja $f(x) = 8x^{-3}$, para $x > 2$. Calcule o valor esperado de $W = X/3$ calculando a função densidade de W .
19. Um dado equilibrado é jogado 72 vezes. Denote por X o número de vezes que aparece o seis, calcule $E(X^2)$.
20. Suponha que a variável contínua X tenha a função densidade de probabilidade $f(x) = 2x \exp(-x^2)$, para $x \geq 0$. Calcule o valor esperado de $Y = X^2$ de duas formas: sem obter e obtendo a densidade de Y .
21. Exercícios do livro texto (4.40, 4.42, 4.46, 4.48, 4.59, 4.67, 4.69, e 4.78).